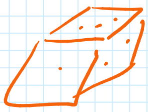
Expected value (valore atteso)

mercoledì 21 agosto 2024

X variabile casuale

↳ $E(X)=\mu=\sum_{x} x\,P(X=x)$

Esempio



$E(\text{risultato dado}) = 3.5$

$$E(X)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=3.5$$

Esempio

Mazzo di carte: una carta numerata 1
due carte numerate 2
tre carte numerate 3
quattro carte numerate 4

$$E(X)=\frac{1}{10}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{3}{10}\cdot 3+\frac{2}{5}\cdot 4=3$$

Proprieta'

- $E(X+c)=E(X)+c$
- $E(cX)=c\,E(X)$

Dado con facce da 5 a 10. Valore atteso?

$E(X)=3.5$ $\qquad E(X+4)=E(X)+4$
$=3,5+4=7.5$

- $E(A+B)=E(A)+E(B)$ → qualsiasi siano A,B
- $E(AB)=E(A)\cdot E(B)$ → solo se A,B sono indipendenti

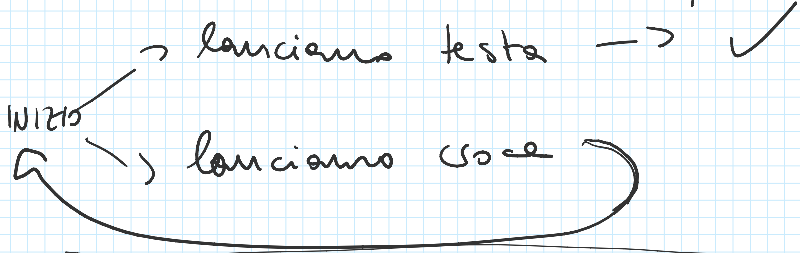
Lanciamo due dadi. Somma A. Prodotto B. $E(A+B)$?

$$E(A+B)=E(A)+E(B)=7+(3,5)^2=19.25$$

$E(A+B) = E(A) + E(B) = 7 + (3,5)^2 = 19.25$

STATI

Moneta equa. E di lanci per ottenere testa per la prima volta?



$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1+x) \\ x = 2 \end{cases}$$

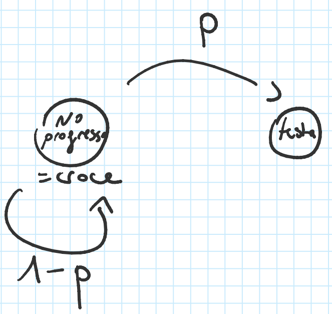
$$\boxed{x = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots}$$

$$\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

$$x - \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$\frac{x}{2} = 1 \longrightarrow x = 2$$

Moneta che dà testa con $0 \le p < 1$. ... ?



$$x = 1 \cdot p + (1+x)(1-p)$$

$$x = 1/p$$

PROB 11

Formaggio con 2024 fette.

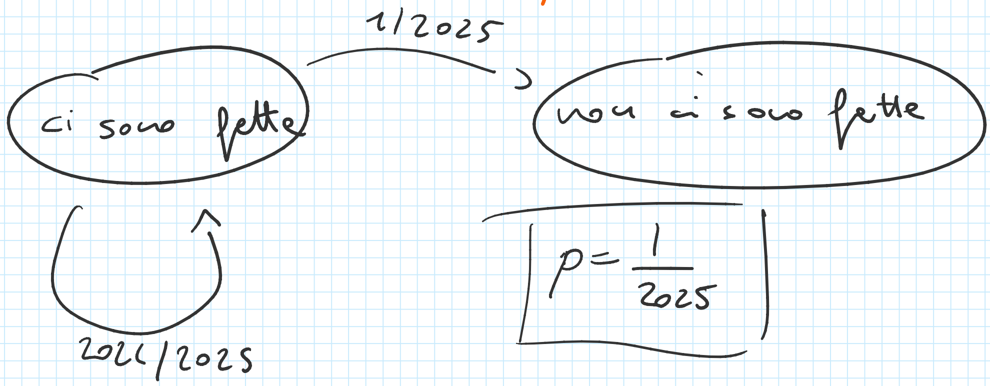
Dado 2025 facce 0, 1, ..., 2024.

Se tira k e ci sono ancora k fette di formaggio le mangia, altrimenti non fa nulla e poi ritira il dado.

Continua a tirare finché non finisce formaggio

le mangia, altrimenti non fa nulla e poi ritira il dado.
Continua a tirare finché non finisce formaggio.
E(lanci per finire il formaggio)?

SOL 1)

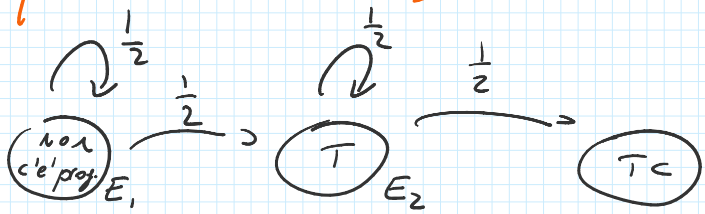


$$x = 1\cdot\frac{1}{2025} + (x+1)\cdot\frac{2024}{2025} \implies x = 2025$$

PROB 2)

Moneta equa. Numero atteso di lanci per ottenere TC?

SOL 2)



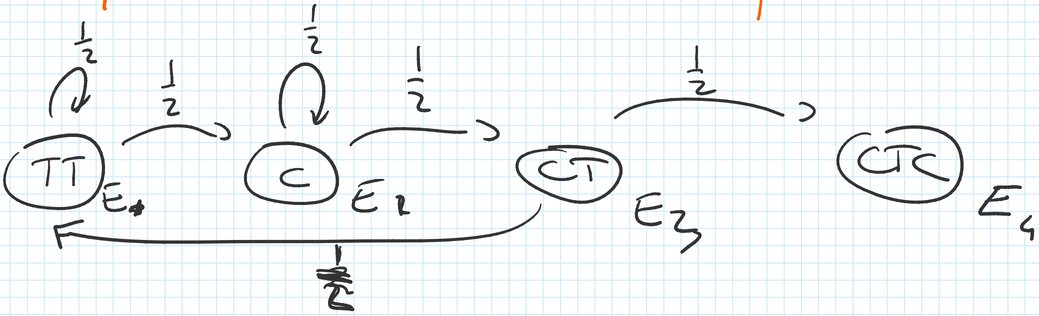
$$x = \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1+x) \implies x = 4$$

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{1+E_2+1+E_1}{2} \\[2ex] E_2 = \dfrac{1+E_3+1+E_2}{2} \end{cases} \qquad E_3 = 0$$

PROB 3)

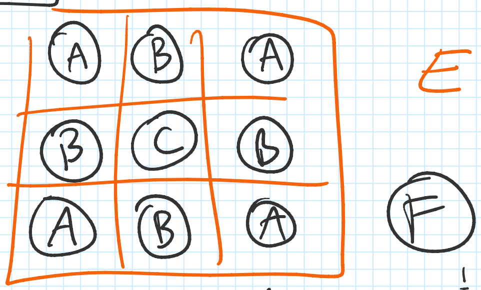
Moneta equa. Numero atteso di lanci per ottenere CTC?

SOL 3

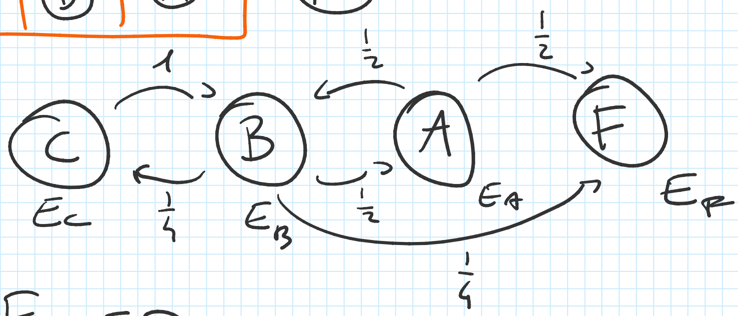


$$\begin{cases} E_4 = 0 \\ E_3 = \dfrac{(E_1+1)+(E_4+1)}{2} \\ E_2 = \dfrac{(E_2+1)+(E_3+1)}{2} \\ E_1 = \dfrac{(E_1+1)+(E_2+1)}{2} \end{cases} \longrightarrow \boxed{E_1 = 10}$$

PROB 4)

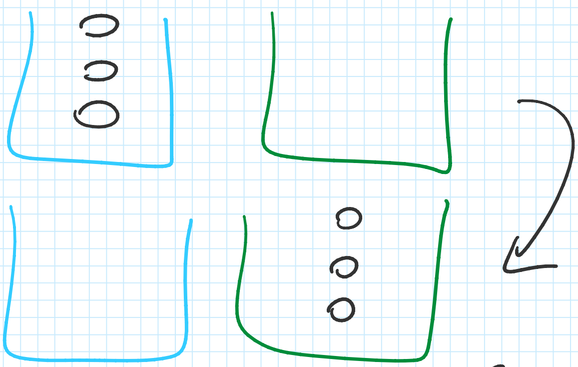


E (passi per uscire dalla griglia)?



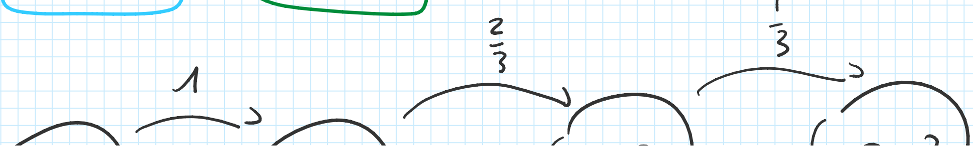
$$\begin{cases} E_F = 0 \\ E_C = 1 + E_B \\ E_B = \frac{1}{4}(1+E_C) + \frac{1}{2}(1+E_A) + \frac{1}{4}(1+E_F) \\ E_A = \frac{1}{2}(1+E_B) + \frac{1}{2}(1+E_F) \end{cases}$$

PROB 5)

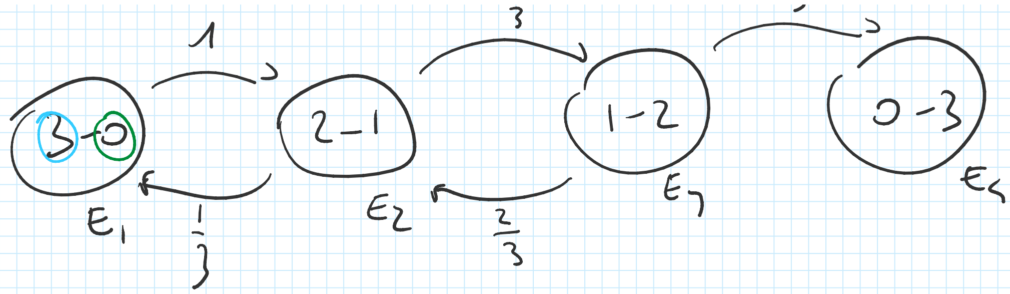


E?

SOL 5)



SOL 5)



$$\left\{ \; \ldots \right. \implies \boxed{E_1 = 10}$$

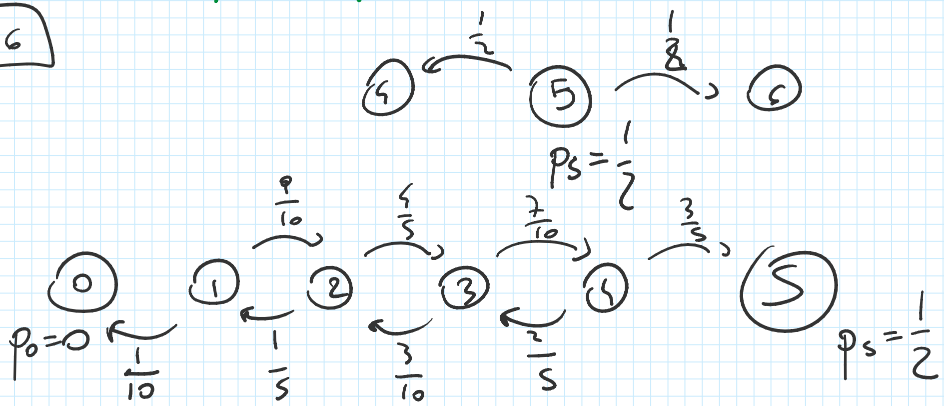
PROB 6)

→ sono 11 ninfe

Se cammina su $0<N<10$, allora salta su $N-1$ con $p=\frac{N}{10}$ e salta su $N+1 = 1-\frac{N}{10}$.

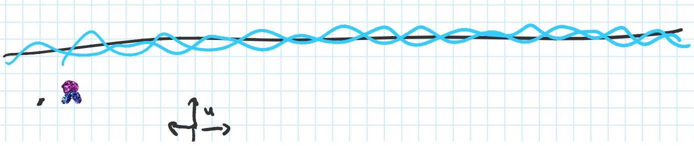
Se raggiunge la ninfa 0, viene mangiata da qualcuno. Qual è la probabilità che raggiunga la ninfa 10 senza essere mangiata?

SOL 6)

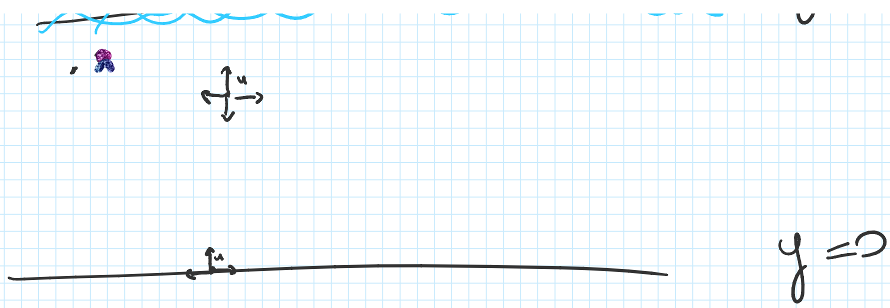


$$\left\{ \; \ldots \right. \implies P_1 = \frac{63}{146}$$

PROB 7)



$y = 24$



$(0,21)$

$E(t)$ numero di mosse da $y=t$ a $y=24$ $\quad E(21)$?

- $E(24)=0$
- $E(k)=\underbrace{\frac{1}{4}\left(E(k-1)+1\right)}+\underbrace{\frac{1}{4}\left(E(k+1)+1\right)}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(E(k)+1\right)} \qquad 1\le k\le 23$
- $E(0)=\underbrace{\frac{2}{3}\left(E(0)+1\right)}+\underbrace{\frac{1}{3}\left(E(1)+1\right)} \Rightarrow E(0)=E(1)+3$

$$E(1)=E(2)+7$$
$$E(2)=E(3)+11$$

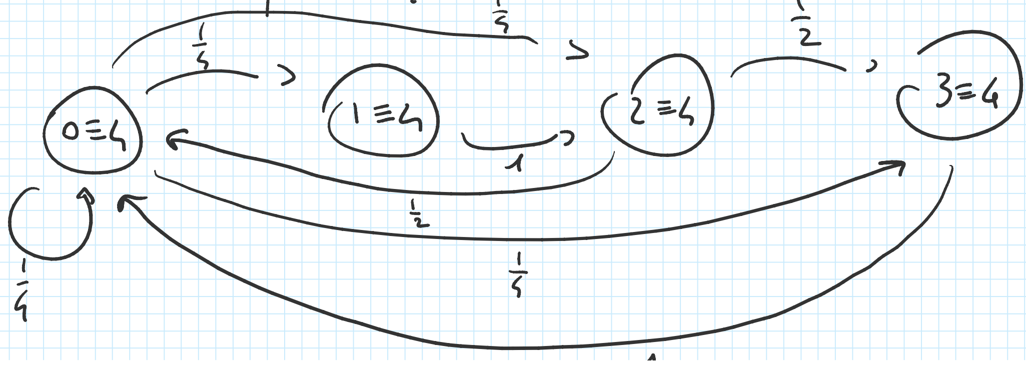
$E(n)=\cancel{E(n+1)}+4(n+1)-1$

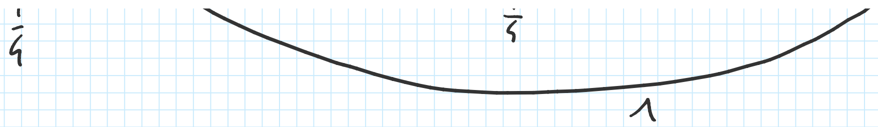
$\hookrightarrow E(21)$

PROB) Alberto fa un gioco e parte da 1.

$n \to n+$ intero da 1 a $\operatorname{Mcd}(n,4)$ inclusi

$2024^{2024^{2024}}$ mosse, probabilità che il numero finale sia divisibile per 4?



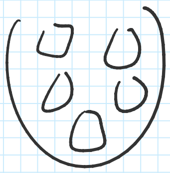


Linearity of expectation

$$X_1, X_2, \dots, X_n \Rightarrow E(X_1+X_2+\dots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_n)$$

Esempio

n persone con n biglietti



↪ ognuno pesca un biglietto

E(numero di persone che pescheranno il loro biglietto) ?

Soluzione

$$E(S) \underset{*}{=} \frac{1}{n!}\left((n-1)! + (n-1)! + \dots + (n-1)!\right) = \frac{1}{n!}\cdot n(n-1)! = 1$$

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{se la persona pesca il proprio biglietto } \left(p = \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{se non lo fa } \left(p = 1 - \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + \dots + S_n}$$

$$E(S) = E(S_1) + E(S_2) + \dots + E(S_n) = \underbrace{\frac{1}{n}\cdot 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 0 + \dots + S_n}_{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n = 1$$

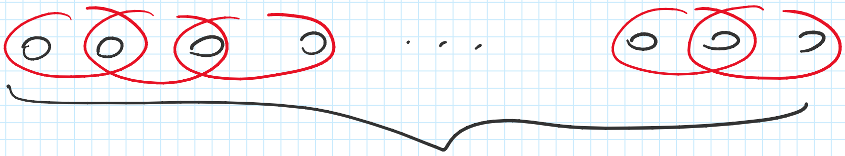
Esempio 2

25 monete lanciate di fila. Valore atteso del numero di TT consecutive ?

$\underbrace{\text{C T T T T C T C T T}}$

↳ 3 TT

Soluzione 2



25 monete

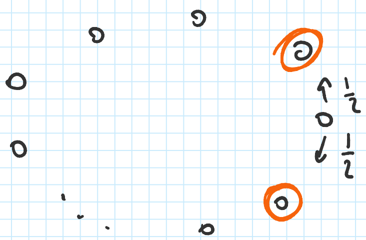
24 coppie di monete

$p(TT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$E(x_i) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}$

$$E(x_1 + x_2 + \dots + x_{24}) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_{24})$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

Esempio 3



2024 persone

Valore atteso del numero di persone non indicate?

Soluzione Numeriamo le persone $1, 2, 3, \dots, 2024$ e definiamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la persona non è indicata} \quad \left(\frac{1}{4}\right) \\ 0 & \text{altrimenti} \quad \left(\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{2024}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{2024})$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4} = \frac{2024}{4} = \underline{506}$$

PROBLEMA 1

$0.\overline{abc}$ dove a, b, c sono cifre distinte

$0.\overline{abc}$ dove a,b,c sono cifre distinte

Quanto vale la somma degli elementi di S?

SOLUZIONE

1) $0.\overline{730}$, $0.\overline{269}$ $\longrightarrow 1$

$0.\overline{abc}$, $0.\overline{efg}$ $\longrightarrow a+e=9 \quad b+f=9 \quad c+g=9$

Numero di elementi di S è $10\cdot 9 \cdot 8$

Somma elementi di S è $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{2} = \underline{360}$

2) $0.\overline{abc}$

$$E(a) = \frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9}{10} = 4,5 = E(b) = E(c)$$

$$E(X) = 4,5\cdot 10^{-1} + 4,5\cdot 10^{-2} + 4,5\cdot 10^{-3} + 4,5\cdot 10^{-4} + \dots$$

$$= 0.45\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots\right)$$

$$= 0.45\cdot\frac{10}{9} = 0,5$$

$$\Sigma = 0,5\cdot 10\cdot 9\cdot 8 = \underline{360}$$

PROBLEMA 2

cifre $1,2,3,4$ formano due numeri di due cifre AB e CD.

Valore atteso di $AB\cdot CD$?

$E(AB)\cdot E(CD)$ non si può fare perché sono dipendenti!!

SOLUZIONE

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= 10A+B\\ \overline{CD} &= 10C+D\end{aligned}\right\}$$

$$E(100\cdot AC + 10\cdot AD + 10\cdot BC + B\cdot D)\ ?$$

$$= E(100AC) + E(10\cdot AD) + E(10\cdot BC) + E(BD)$$

$= E(100\,AC) + E(10\,AD) + E(10\,BC) + E(BD)$

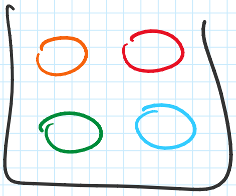
$= 100\,E(AC) + 10\,E(AD) + 10\,E(BC) + E(BD)$

$= 121 \cdot E(AC)$

$$E(A \cdot C) = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4}{6} = \frac{35}{6}$$

$$E(\ldots) = \frac{35}{6}\cdot 121 = \boxed{\frac{4235}{6}}$$

PROBLEMA 3



Alberto pesca 4 palline dalla scatola rimettendole dentro di volta in volta.

Numero atteso di calori distinti che pescherà?

SOLUZIONE

Definiamo $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se il colore } i \text{ viene pescato} \to 1-\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256} \\ 0 & \text{se il colore } i \text{ non viene pescato} \to \left(\frac{3}{4}\right)^4 \end{cases}$ $\quad 1 \le i \le 4$

$$E(X_1+X_2+X_3+X_4) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)$$

$$E(\text{colori pescati}) = 4\cdot\frac{175}{256} = \frac{175}{64} = 2{,}73\ldots$$

PROBLEMA 4

Alberto e Barbara stanno facendo test con altri 1022 studenti.

Test con 30 domande da $1, 2, \ldots, 30$ punti.

$\begin{cases} \text{Alberto risolve } n\text{-imo problema con } p = \frac{1}{n^2}. \\ \text{Barbara risolve } n\text{-imo problema con } p = \frac{1}{n+1}. \end{cases}$

Se Alberto e Barbara rispondono upuale copiano, altrimenti no.

Valore atteso della somma dei 1024 punteggi?

$$\sum^{30} n\left(\frac{1}{\ldots} \ldots \frac{1}{\ldots} \ldots \frac{1022}{\ldots}\right) = \sum^{30}\left(\frac{1}{\ldots} \ldots \frac{1}{\ldots} \ldots 1022\right)\overbrace{\left(\frac{1}{\ldots} - \frac{1}{\ldots}\right)}^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{30} n\cdot\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1022}{n^2(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{30}\left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n+1}+1022\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$= 30+1023\sum_{n=1}^{30}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 30+1023\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{31}\right)$$

$$= 30+1023-33=\boxed{1020}$$

PROBLEMA 51

[1] [2] [3] [+] [−]

Esempio [+] [−] [3] [2] [+] = −32

[−] [3] [+] [2] [−] = −1

Valore atteso del risultato?

SOLUZIONE

[ ] [+] [ ] [ ] [ ]

cifra −

[+] [3] [−] [1] [2]

[−] [3] [+] [1] [2] } = 0

[ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

cifra o

cifra cifra o

cifra cifra cif... o ...

$$2\cdot\left(\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot 10+\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot 100+\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot 1000+\left(\frac{3}{5}\right)^5\cdot 10000\right)=\boxed{1866}$$

PROBLEMA 6

$a_1, a_2, a_3, \dots$ $\qquad 1\le a_i\le 2016$

$$S=\{k \mid \forall j<k \text{ vale } a_j\ne a_k\}$$

Esempio $\quad \underset{a_1}{1},\ \underset{a_2}{17},\ \underset{a_3}{2},\ \underset{a_4}{1},\ \underset{a_5}{24},\ \underset{a_6}{17},\ \underset{a_7}{17}$

Valore atteso di interi positivi m tali che sia m che $m+1$ sono in S?

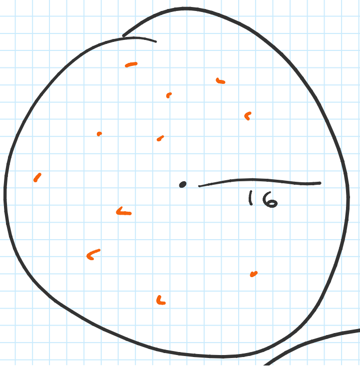
SOLUZIONE

S_k il k-imo elemento di S (ordinato per grandezza).

k elementi di $\{1,\dots,2016\}$ compaiono in $\{a_1,a_2,\dots,a_{S_k}\}$.

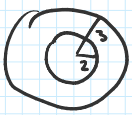
La probabilita' che a_{S_k+1} non compaia in $\{a_1,a_2,\dots,a_{S_k}\}$ e' $\frac{2016-k}{2016}$. Quindi

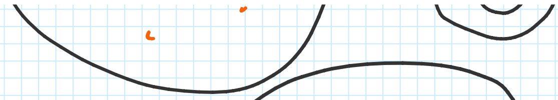
$$E=\frac{2015}{2016}+\frac{2014}{2016}+\dots+\frac{1}{2016}=\frac{2015\cdot 2016}{2\cdot 2016}=\frac{2015}{2}$$



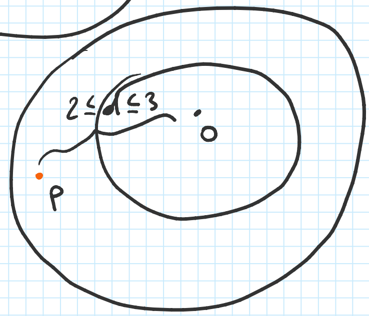
$R=16$

650 punti "speciali"

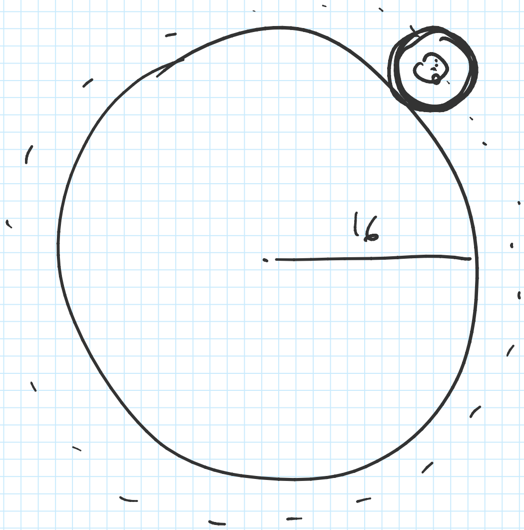




P



$$A_o = 3^2\pi - 2^2\pi = 5\pi$$



$$A = 19^2\pi = 361\pi$$

$$p = \frac{5\pi}{361\pi} = \frac{5}{361}$$

$$650p = 650 \cdot \frac{5}{361} = \boxed{9.003}$$

□